Poznámky a příklady. *1. H_d je vektorový prostor. Navíc pro $f, g \in H_d$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

2. Pro $f, g \in H_d$, $f \leq g$, platí $\int f \leq \int g$.

3. Pro $f, g \in H_d$ platí $\max(f,g), \min(f,g), f^+, f^-, |f| \in H_d$ a

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Lemma 1 (konvergence schodovitých funkcí)**.** *Je-li $\{f_n\} \subset H_d$ monotónní posloupnost splňující $f \to 0$ na $\mathbb{R}^d$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$.*

Lemma 2 (konvergence schodovitých funkcí skoro všude)**.** *Je-li $\{f_n\} \subset H_d$ monotónní posloupnost splňující $f \to 0$ s.v. na $\mathbb{R}^d$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 0$.*

Lemma 3 (korektnost definice Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť $\{f_n\}.\{g_n\} \subset H_d$ jsou monotónní posloupnosti, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $f_n \to f$ s.v. a $g_n \to g$ s.v., potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n.$$

Definice 4 (měřitelné a Lebesgueovsky integrovatelné funkce)**.** *Nezápornou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme*

- ***měřitelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v.,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v., a $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n < \infty$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Prostor všech nezáporných měřitelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{M}_d^+$, prostor všech nezáporných Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{L}_d^+$ Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme

- ***měřitelnou**, pokud $f^-, f^+ \in \mathcal{M}_d^+$,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud $f^-, f^+ \in \mathcal{L}_d^+$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Lemma 5 (vlastnosti $\mathcal{L}^+$)**.** *Nechť* $f, g \in \mathcal{L}^+$, $\alpha, \beta \geq 0$, *potom:*

1. *je-li* $f \leq g$ *s.v. potom* $\displaystyle\int f \leq \int g$.
2. $\max(f, g), \min(f, g), \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+$.

Lemma 6 (vlastnosti $\mathcal{L}$)**.** *Nechť* $f, g \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *potom:*

1. *je-li* $f \leq g$ *s.v. potom* $\displaystyle\int f \leq \int g$.
2. $\max(f, g), \min(f, g), \alpha f + \beta g, |f| \in \mathcal{L}^+$. *navíc*

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g \quad a \quad \left|\int f\right| \leq \int |f|.$$